গণিতপরিক্রমা ২৫শ খণ্ড ২০১৫ পৃ. ৩১-৩৭

গতি সমীকরণ : কিছু বক্তব্য

মো. আশিক সিদ্দীক

আসমানিয়া দড়িকান্দি, তিতাস, কুমিল্লা

ভূমিকা

ত্বরণ বেগ বৃদ্ধির হার। সুষম ত্বরণ হল বেগ বৃদ্ধির সমহার। যদি কোন বস্তুর বেগ প্রতি একক সময়ে সমপরিমাণ বৃদ্ধি পায় তবে সে বেগকে সুষম ত্বরণ বলে। মনে করি, একটি গাড়ি ১ম ঘন্টায় ১০ কি.মি., ২য় ঘন্টায় ২০ কি.মি., ৩য় ঘন্টায় ৩০ কি.মি. দূরত্ব অতিক্রম করেছে। গাড়িটির ত্বরণ হল সুষম ত্বরণ। সুষম ত্বরণশীল বস্তুর আদিবেগ, শেষবেগ, ত্বরণ, গতিকাল, অতিক্রান্ত দূরত্ব ইত্যাদি রাশির মধ্যকার সম্পর্ক স্থাপিত হয় কতিপয় গতি সমীকরণের সাহায্যে। অতএব এসব রাশির মান নির্ণয়ে যথার্থ গতি সমীকরণের আবশ্যিকতা অনস্বীকার্য। আলোচ্য লেখায় আমরা প্রত্যক্ষ করব সুষম ত্বরণশীল বস্তুর জন্য প্রচলিত চারটি গতি সমীকরণ সঠিক নয়। প্রথমেই ত্রুটির বিষয়টি উদঘাটন করব। অতঃপর সংশোধনকৃত নতুন সমীকরণগুলি প্রতিপাদন করা হবে। পরিশেষে দেখব প্রচলিত সমীকরণ উদ্ভাবনকালে কোন ভুলের ফলে সমীকরণগুলি ত্রুটিপূর্ণ হল। আরও দেখব কেনইবা এ ত্রুটি এতদিন গা ঢাকা দিয়ে থাকতে পেরেছিল।

সুষম ত্বরণের স্বরূপ: সুষম ত্বরণের দুটি দিক হল

(i) স্থির কিংবা গতিশীল - উভয় অবস্থা থেকে বস্তু সুষম ত্বরণশীল হতে পারে।

(ii) গতিশীল অবস্থা থেকে বস্তু সুষম ত্বরণশীল হলে - বস্তু যে বেগে গতিশীল ত্বরণ তার সমান হতে পারে এবং ভিন্নও হতে পারে। যেমন 20 ms^{-1} বেগে গতিশীল একটি গাড়িতে 10 ms^{-2} বা 25 ms^{-2} হারে ত্বরণ দেয়া যেতে পারে।

প্রচলিত গতি সমীকরণ

- ***স্থির অবস্থার ক্ষেত্রে:*** মনে করি, একটি বস্তু স্থির অবস্থা থেকে 10 ms^{-2} সুষম ত্বরণশীল। অতএব এর আদিবেগ $u = 0\ ms^{-1}$, ত্বরণ $a = 10\ ms^{-2}$। পঞ্চম সেকেন্ডে গাড়িটির বেগ 50 ms^{-1}। অতএব গাড়িটির গতিকাল $t = 5$ seconds এবং শেষবেগ $v = 50\ ms^{-1}$।

- ***গতিশীল অবস্থার ক্ষেত্রে:*** ধরি, একটি বস্তু 20 ms^{-1} বেগে গতিশীল। অতএব এর আদিবেগ $u = 20\ ms^{-1}$। বস্তুটিতে 10 ms^{-2} হারে সুষম ত্বরণ প্রযুক্ত হল। এতে ৩য় সেকেন্ডে বস্তুটির বেগ 50 ms^{-1}। এখানে গতিকাল $t = 3$ seconds এবং শেষবেগ $v = 50\ ms^{-1}$।

সুষম ত্বরণশীল বস্তুর জন্য প্রচলিত সমীকরণসমূহ

(1) $v = u + at,$

(2) $\dfrac{s}{t} = \dfrac{u+v}{2}$

(3) $s = ut + ½at^2$

(4) $v^2 = u^2 + 2as$

যেখানে u = আদিবেগ, v = শেষবেগ, t = গতিকাল, a = সুষম ত্বরণ এবং s = মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব। হ্যা, সমীকরণগুলি বহু বছর ধরে প্রচলিত। তা সত্ত্বেও সবিনয়ে প্রশ্ন রাখছি সমীকরণগুলির যথার্থতা নিয়ে।

প্রচলিত গতি সমীকরণের ত্রুটি: আমরা জানি, বস্তুর বেগ $v = \dfrac{s}{t}$ বা $v = s$ [যখন t = 1 একক]…(i)। ধরি, সুষম ত্বরণশীল বস্তুর ১ম সেকেন্ডে বেগ v_1 এবং অতিক্রান্ত দূরত্ব s_1। অনুরূপভাবে ২য় সেকেন্ডে v_2 ও s_2। (i) নং অনুসারে $v_1 = s_1$, $v_2 = s_2$, $v_3 = s_3$, $v_4 = s_4$ এবং $v_5 = s_5$।

অতএব, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$

$\therefore$ সুষম ত্বরণশীল বস্তুর বেগের সমষ্টি = মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব… (ii)

Part 1: একটি বস্তু স্থির অবস্থা থেকে সুষম ত্বরণশীল। এর বস্তুটির

$$u = 0\ ms^{-1},\ v = 50\ ms^{-1},\ t = 5 \text{ seconds},\ a = 10\ ms^{-2}\text{।}$$

অতএব বেগের সমষ্টি = 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150।

$\therefore$ (ii) নং অনুসারে, মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 150\ m$।

এখন দেখি প্রচলিত সমীকরণ $s = 150$ দিতে পারে কিনা, নাকি ব্যর্থতায় পর্যবসিত হয়।

$$s = ut + ½at^2 \text{ বা } s = 0 \times 5 + ½ \times 10 \times 5^2 = 125$$

কি বলবেন (!), অপর সমীকরণগুলির ক্ষেত্রেও এমনটা হয়:

$$\frac{s}{t} = \frac{u+v}{2} \text{ বা } s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t = \left(\frac{0+50}{2}\right)5 = 125$$

$$v^2 = u^2 + 2as \text{ বা } s = \frac{v^2 - u^2}{2a} = \frac{50^2 - 0^2}{2 \times 10} = 125$$

অতএব, বস্তু যখন স্থির অবস্থা থেকে সুষম ত্বরণশীল সেক্ষেত্রে প্রচলিত সমীকরণ সঠিক, তা বলা যায় না।

Part 2: 20 ms^{-1} বেগে গতিশীল একটি বস্তুতে 10 ms^{-2} সুষম ত্বরণ প্রযুক্ত হল। বস্তুটির $u = 20\ ms^{-1}$, $v = 50\ ms^{-1}$, $t = 3$ seconds, $a = 10\ ms^{-2}$।

অতএব t সময়ে বেগের যোগফল = 30 + 40 + 50 = 120।

(ii) নং অনুসারে, মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $s = 120\ m$।

এখন দেখি প্রচলিত সমীকরণ $s = 120$ দিতে পারে কিনা:

$$s = ut + ½at^2 = s = 20 \times 3 + ½ \times 10 \times 3^2 = 105$$

কি বলবেন (!) অপর সমীকরণগুলির ক্ষেত্রেও এমনটা হয়:

$$\frac{s}{t} = \frac{u+v}{2} \text{ বা } s = \left(\frac{u+v}{2}\right)t = \left(\frac{20+50}{2}\right)3 = 105$$

$$v^2 = u^2 + 2as \text{ বা } s = \frac{v^2 - u^2}{2a} = \frac{50^2 - 20^2}{2 \times 10} = 105$$

অতএব, স্থির কিংবা গতিশীল - উভয় অবস্থা থেকে সুষম ত্বরণশীল বস্তুর জন্য প্রচলিত সমীকরণ সঠিক নয়।

সংশোধনকৃত প্রস্তাবিত গতি সমীকরণ: এ পর্যায়ে আমরা নতুন কয়েকটি সমীকরণ প্রত্যক্ষ করব যা $s = 150$ (Part 1) এবং $s = 120$ (Part 2) দিতে সক্ষম

(1) $v = v_1 + a(t - 1)$

(2) $\dfrac{s}{t} = \dfrac{v_1 + v}{2}$

(3) $s = v_1t + ½at^2 - ½at$

(4) $v^2 = v_1^2 + 2as - a(v_1 + v)$

যেখানে v_1 = ১ম সেকেন্ডে বেগ এবং v, t, a, s পূর্বের অনুরূপ রাশি। লক্ষণীয় যে, প্রস্তাবিত নতুন সমীকরণে প্রথম সেকেন্ডে বেগ (v_1) নামক নতুন রাশি আনয়ন করা হয়েছে। এর কারণ হল- সমান্তর ধারা গঠনকারী রাশিসমূহকে সমীকরণবদ্ধ করতে হলে ধারাটির প্রথম পদ প্রয়োজন হয়। আর সুষম ত্বরণশীল বস্তুর বেগগুলি সমান্তর ধারা গঠন করে। তাই প্রথম সেকেন্ডে বেগ (v_1) এর প্রযোজ্যতা রয়েছে। এবার আমরা মান বসিয়ে সমীকরণগুলি যাচাই করব।

স্থির অবস্থার ক্ষেত্রে: একটি বস্তু স্থির অবস্থা থেকে সুষম ত্বরণশীল। এর প্রথম সেকেন্ডে বেগ $v_1 = 10\ ms^{-1}$, গতিকাল $t = 5$ seconds, ত্বরণ $a = 10\ ms^{-2}$ এবং শেষবেগ $v = 50\ ms^{-1}$। দেখা যাক আমাদের প্রস্তাবিত নতুন সমীকরণ $s = 150$ দিতে সক্ষম কিনা।

$$s = v_1t + ½at^2 - ½at$$
$$= 10 \times 5 + ½ \times 10 \times 5^2 - ½ \times 10 \times 5$$
$$= 150$$

$$\frac{s}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$$

$$\text{বা, } s = \left(\frac{v_1 + v}{2}\right)t = \left(\frac{10+50}{2}\right)5 = 150$$

$$v^2 = v_1^2 + 2as - a(v_1 + v)$$

$$\text{বা, } s = \frac{v^2 - v_1^2 + a(v_1 + v)}{2a} = \frac{50^2 - 10^2 + 10(10+50)}{2 \times 10} = 150$$

গতিশীল অবস্থার ক্ষেত্রে: ধরি, একটি বস্তু 20 ms^{-1} বেগে গতিশীল। এতে 10 ms^{-2} সুষম ত্বরণ প্রযুক্ত হল। এর ১ম সেকেন্ডে বেগ $v_1 = 30\ ms^{-1}$, গতিকাল $t = 3$ seconds, ত্বরণ $a = 10\ ms^{-2}$ এবং শেষবেগ $v = 50\ ms^{-1}$। দেখা যাক আমাদের প্রস্তাবিত সমীকরণ $s = 120$ দিতে সক্ষম কিনা।

$$s = v_1t + ½\text{at}^2 - ½\text{at}$$
$$= 30 \times 3 + ½ \times 10 \times 3^2 - ½ \times 10 \times 3$$
$$= 120$$

$$v^2 = v_1^2 + 2as - a(v_1 + v)$$

$$\text{বা, } s = \frac{v^2 - v_1^2 + a(v_1 + v)}{2a} = \frac{50^2 - 30^2 + 10(30+50)}{2 \times 10} = 120$$

আমরা দেখলাম, প্রস্তাবিত গতি সমীকরণ আমাদের প্রত্যাশিত মান দিতে সক্ষম।

প্রস্তাবিত নতুন গতি সমীকরণ প্রতিপাদন: এ পর্যায়ে আমরা নতুন উদ্ভাবনকৃত সমীকরণগুলি প্রতিপাদন করব। আমরা জানি, সুষম ত্বরণশীল বস্তুর বেগগুলি সমান্তর ধারা গঠন করে, যেখানে সমান্তর ধারার টার্ম অনুসারে v_1 = ১মপদ, v = শেষপদ, t = পদসংখ্যা, এবং a পদগুলির সাধারণ অন্তর।

$v = v_1 + a(t-1)$ *সমীকরণ প্রতিপাদন*

সমান্তর ধারার সূত্রানুসারে,

$$\frac{t}{2}(v_1 + v) = \frac{t}{2}\{2v_1 + a(t-1)\}$$ [উভয়ে যোগফলের সূত্র]

বা, $v_1 + v = 2v_1 + a(t-1)$

$\therefore\ v = v_1 + a(t-1)$ [Proved]……….(iii)

$\frac{s}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$ *সমীকরণ প্রতিপাদন*

সমান্তর ধারার নীতি অনুসারে,

$$\frac{\text{বেগের যোগফল}}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$$

কিন্তু (ii) নং অনুসারে, বেগের যোগফল = s বা মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব

$\therefore\ \frac{s}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$ [Proved]

$s = v_1t + ½at^2 – ½at$ *সমীকরণ প্রতিপাদন*

আমরা জানি,

$$\frac{s}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$$

এখন, (iii) নং থেকে v এর মান বসিয়ে আমরা পাই,

$$\frac{s}{t} = \frac{v_1 + v_1 + a(t-1)}{2}$$

বা, $2s = t(2v_1 + at - a)$

বা, $2s = 2v_1t + at^2 - at$

$\therefore\ s = v_1t + ½at^2 - ½at$ [Proved]

$v^2 = v_1^2 + 2as - a(v_1 + v)$ *সমীকরণ প্রতিপাদন*

মনে করি, একটি বস্তু প্রথম সেকেন্ডে v_1 বেগ নিয়ে a সুষম ত্বরণশীল। এর গতিকাল t, শেষবেগ v এবং মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব s।

আমরা জানি,

$$\frac{s}{t} = \frac{v_1 + v}{2}$$

বা, $s = \left(\frac{v_1 + v}{2}\right)t$ ……….(iv)

আবার আমরা আরও জানি,

$v = v_1 + a(t-1)$

বা, $v = v_1 + at - a$

বা, $at = v - v_1 + a$

বা, $t = \frac{v - v_1 + a}{a}$ ……….(v)

এখন, (v) নং থেকে t এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$$s = \left(\frac{v_1 + v}{2}\right)\left(\frac{v - v_1 + a}{a}\right)$$

বা, $s = \frac{v_1v - v_1^2 + v_1a + v^2 - v_1v + va}{2a}$

বা, $2as = v_1v - v_1^2 + v_1a + v^2 - v_1v + va$

বা, $2as = v^2 - v_1^2 + a(v_1 + v)$

$\therefore\ v^2 = v_1^2 + 2as - a(v_1 + v)$ [Proved]

একটি উদাহরণ বিশে� ষণ:মনে করুন আপনার ব্যক্তিগত রোলস্ রয়েস গাড়িটিকে নিয়ে লং ড্রাইভে বেরুলেন। আপনি প্রথম ঘন্টায় 10 km পথ অতিক্রম করলেন। এক্ষেত্রে আপনার বেগ 10 kmh^{-1}। এবার ২য় ঘন্টায় বেগ একটু বাড়িয়ে 20 km পথ গেলেন। এবার আপনার বেগ 20 kmh^{-1}। ১ম ও ২য় ঘন্টায় বেগের পার্থক্য 10 এবং অতিক্রান্ত দূরত্বের পার্থক্যও 10। অর্থাৎ সুষম ত্বরণশীল বস্তুর বেগের মান এবং অতিক্রান্ত দূরত্বের মান সমান। যাই হোক, আপনি সমান হারে বেগ বৃদ্ধি করতে থাকলেন। ৩য় ঘন্টায় 30 km পথ অতিক্রম করলেন। ৪র্থ ঘন্টায় 40 km পথ গেলেন এবং ৫ম ঘন্টায় গেলেন 50 km পথ। এই পাঁচ ঘন্টায় আপনি মোট কত কি.মি. পথ অতিক্রম করলেন? উত্তরঃ 150 km। কোন সন্দেহ (?!)। না, কোন সন্দেহ নেই। 150 km-ই গিয়েছেন। অতএব সুষম ত্বরণশীল বস্তুর জন্য প্রযোজ্য সমীকরণকে অবশ্যই s = 150 দিতে হবে। আর এখানেই প্রচলিত সমীকরণ ব্যর্থতায় পর্যবসিত হয়।

প্রচলিত সমীকরণের কেন এই ত্রুটি: এ পর্যায়ে আমরা দেখব প্রচলিত সমীকরণের এই ত্রুটি কেন হয়েছিল আসলে। আমরা জানি, সুষম ত্বরণশীল বস্তুর বেগগুলি সমান্তর ধারা গঠন করে যেখানে সমান্তর ধারার টার্ম অনুসারে v_1 = ১ম পদ, v = শেষপদ, t = পদসংখ্যা এবং a = পদগুলির সাধারণ অন্তর। আর পূর্বে দেখানো হয়েছে পদের যোগফল বা বেগের যোগফল = s বা মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব। অতএব, t, v, a, s ইত্যাদি রাশিগুলির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে সমীকরণবদ্ধ করতে হলে সমান্তর ধারার নীতি অনুসারেই করতে হবে। প্রচলিত সমীকরণগুলি উদ্ভাবন করা হয়েছে তা না করেই। ফলস্বরূপ যা হওয়ার তাই হয়েছে।

ত্রুটি কিভাবে এতদিন চোখ এড়িয়ে গেল: এ পর্যায়ে আমরা দেখব প্রচলিত সমীকরণের এই ত্রুটি কেন এত বছর গা ঢাকা দিয়ে থাকতে পেরেছিল। ধরা যাক, একটি বস্তু স্থির অবস্থা থেকে $10\ ms^{-2}$ সুষম ত্বরণশীল এবং শেষবেগ v, গতিকাল t। এখন a নির্ণয় করা যেতে পারে কয়েকটি সমীকরণের সাহায্যে

(1) $a = \dfrac{v-u}{t}$

(2) $a = \dfrac{v-v_1}{t-1}$

(3) $a = \dfrac{v-v_2}{t-2}$

(4) $a = \dfrac{v-v_3}{t-3}$

(5) $a = \dfrac{v-v_4}{t-4}$ ।

সকল সমাকরণই $a = 10$ দিবে কিন্তু শুধুমাত্র ২য় সমীকরণই সমান্তর ধারা সমর্থিত। আর অবশ্যই সমান্তর ধারার সাধারণ অন্তর a নির্ণয়ে আপনাকে সমান্তর ধারা সমর্থিত সমীকরণই ব্যবহার করতে হবে। $a = \dfrac{v-u}{t}$ সমান্তর ধারা সমর্থিত সমীকরণ নয় যদিও এটা থেকে $a = 10$ পাওয়া যায়। আর পাওয়া যায় বলেই আপাতদৃষ্টিতে প্রচলিত সমীকরণ সঠিক মনে হয়। তবে a এর অপর সমীকরণমালায় (যেমন $s = ut + ½at^2$) এই ত্রুটির প্রভাব ঠিকই দৃশ্যমান হয়।